

prima **philosophia**

Herausgegeben von:

SABINE S. GEHILHAAR

Redaktionelle Mitarbeit:

MICHAELA PH. JAEGGI

— **Sonderdruck** —

TRAUDE JUNGHANS VERLAG CUXHAVEN & DARTFORD

Band 11 / 1998

Heft 2

ENTSCHEIDUNGSTHEORETISCHE URTEILSLOGIK
VERSUS
WIDERLEGBARE KLASSISCHE AUSSAGENLOGIK?
EIN KLÄRUNGSVERSUCH

von Werner Loh, Paderborn

1. Entwicklung der Problemlage

Für die folgenden Darlegungen gehe ich davon aus, daß Wissenschaften auch in der Selbstreflexion von der Idee geleitet sein sollten, bessere von schlechteren (möglichen) Lösungen zu unterscheiden. Dies setzt voraus, daß man Alternativen anzugeben vermag. Die Zusammenstellung derartiger Alternativen wird oft in Oder-Sätzen zum Ausdruck gebracht. Demnach ist es für ein solches Wissenschaftsverständnis von grundlegender Relevanz, wie in dieser Hinsicht Oder-Sätze zu begreifen sind.

Die klassische Aussagenlogik als Grundlage der modernen Logik bietet Konzepte an, Disjunktionen zu erfassen. Dem angedeuteten Wissenschaftsverständnis nach ist reflexiv zu fragen, ob es Alternativen zu diesen Konzepten der klassischen Aussagenlogik gibt. Es ist nahelegend, sie in der Logik-Tradition zu suchen, welche von der modernen Logik verdrängt worden ist. Als Alternative soll hier eine entscheidungsorientierte Version näher bedacht werden, deren Ansätze bei so unterschiedlichen Autoren wie Hermann Lotze, Christoph Sigwart, Oswald Külpe, Arthur Drews und Edmund Husserl zu finden sind.

Oswald Külpe formulierte: „Das disjunktive Urteil unterscheidet sich von dem divisiven dadurch, daß es die verschiedenen Fälle nicht als gleich möglich hinstellt, sondern auf die Notwendigkeit einer Entscheidung hindrängt: Nur eines von den verbundenen Urteilen ist gültig, die anderen sind ungültig. [...] Die Bedeutung der disjunktiven Urteile liegt demnach in der Vorbereitung des einfachen gültigen Urteils.“ (1923, 284/285) Das disjunktive Urteil ermöglicht also eine Entscheidung, die zu einem einfachen Urteil führt, welche das disjunktive Urteil ablöst und hinfällig macht. Edmund Husserl hat dieses Hinfalligwerden dahingehend verstanden, daß die nicht zum Zuge gekommenen Möglichkeiten verworfen würden, denn mit einer „Urteilsentscheidung für eine der Möglichkeiten“ sei „mindestens implizite eine negative, verwerfende Urteilsentscheidung gegen die anderen Möglichkeiten verbunden“ (1966, 357).

Die klassische Aussagenlogik ist nicht wie eine entscheidungsorientierte Logik eine pragmatische, obgleich man in der Verwendung von Variablen und Einsetzungen der Konstanten einen Hauch von Pragmatischen spüren mag. Sind Gesichtspunkte angebar, die beide Logikkonzepte umfassen und dadurch jeweilige Alternativen bestimmen lassen?

Eine Wahrheitfunktion wird durch die symbolisierten, kombinatorisch möglichen Argumentwerte mit den jeweils zugehörigen symbolisierten Funktionswerten charakterisiert. Ist

bei der Einsetzung der symbolisierten Wahrheitswerte in die Variablen für Argumentwerte der Funktionswert für „wahr“ zuordenbar, so gilt die Funktion als *erfüllt*. Einer Wahrheitsfunktion, die mehrere Erfüllungsmöglichkeiten besitzt (mehrzelliger Spielraum), wie z. B. die Disjunktion (als Adjunktion), kann man nicht entnehmen, wodurch sie erfüllt ist. Die jeweilige Erfüllung hebt aus den Erfüllungsmöglichkeiten (Spielraum) eine heraus.

Bedenkt man, was in beiden Logiken Voraussetzung ist und was durch diese Voraussetzung ermöglicht wird, hat man einen gemeinsamen Aspekt: Im Entscheidungszusammenhang ist das disjunktive Urteil Voraussetzung dafür, daß man unter den erwogenen und unvollendet bewerteten Möglichkeiten schließlich durch Vollendung der Bewertung ein einfaches Urteil als Lösung zu gewinnen vermag. Was eine Wahrheitsfunktion ausmacht, ist Voraussetzung dafür, daß sie eine Erfüllung haben kann. Setzt man auf diese Weise an, läßt sich systematisch vergleichen (Loh 1996).

Ich gehe nun auf die schwerwiegendste Problemlage ein, die sich aus einem solchen Vergleich ergibt: Disjunktives Urteil und einfaches Urteil können im Entscheidungsprozess zusammenhang nicht zusammen gültig sein. Dagegen bestehen in der klassischen Aussagenlogik Wahrheitsfunktion, z. B. eine Disjunktion (als Adjunktion), und ihre Erfüllung zu anderen Erfüllungsmöglichkeiten. Für den entscheidungsorientierten Ansatz wäre es ein Widerspruch, unvollendet bewertete erwogene Möglichkeiten und ein durch Entscheidung gewonnenes einfaches Urteil als Lösung, was mit einer Verwerfung erwogener Möglichkeiten als Vollendung der Bewertung einhergeht, zusammen als gültig bestehen zu lassen. Warum wird ein analoger Widerspruch für Wahrheitsfunktionen mit mehrzelligem Spielraum nicht entdeckt?

2. Wann sind Widerspruchsfreiheitsbeweise für die klassische Aussagenlogik hinreichend?

Von Vertretern der klassischen Aussagenlogik habe ich bisher die ausführlichste Entwicklung einer solchen Problemlage bei Alfred Tarski gefunden: „Für gewöhnlich behaupten wir eine Disjunktion zweier Sätze nur dann, wenn wir glauben, daß einer von ihnen wahr ist, aber nicht wissen welcher. Wenn wir etwa bei gewöhnlichem Tageslicht auf einen Rasen blicken, werden wir nicht auf den Gedanken kommen zu sagen, der Rasen sei grün oder blau. Denn wir sind hier in der Lage, eine einfachere und zugleich stärkere Behauptung auszusprechen, die nämlich, daß der Rasen grün ist.“ (1977, 35). Tarski ging bei seinen Überlegungen so weit, daß man eine kommunizierte derartige Oder-Aussage auch als eine Lüge auffassen könne, wenn man wisse, was der Fall sei (1977, 35). Dennoch meinte er, daß die klassische Aussagenlogik berechtigt sei, eine Disjunktion zusammen mit ihrer Erfüllung zu konzipieren, denn, so seine bei anderen Autoren wiederkehrende Begründung (s. z. B. Hilbert und Bernays 1968, 47 Anm. 1; Scholz und Hasenjaeger 1961, 31), die „Wahrheit einer Disjunktion“ hänge allein „von der Wahrheit ihrer Glieder“ ab (1977, 36).

Demnach sind allein die in die Variablen eingesetzten symbolisierten Wahrheitswerte und nicht die anderen Einsetzungsmöglichkeiten zu berücksichtigen, wenn es um die Wahrheit

einer Wahrheitsfunktion geht. Überträgt man diese Konzeption auf die Wahrheitstafeln, dann sind immer nur die jeweiligen Zeilen zu denjenigen symbolisierten Wahrheitswerten, die erfüllen, zu beachten, wenn man die Wahrheit einer Wahrheitsfunktion bestimmen will.

Nun kann man so verfahren und Widerspruchsfreiheitsbeweise beruhen darauf. Aber hierdurch ist nicht die Frage beantwortet, ob bei einer Wahrheitsfunktion im Unterschied etwa zu einer arithmetischen die anderen Erfüllungsmöglichkeiten hinsichtlich der Bestimmung der Wahrheit einer solchen Funktion bedacht werden müssen, wenn man eine hinreichende Überprüfung der Widerspruchsfreiheit erreichen möchte.

Die Widerspruchsfreiheit von Ausschnitten aus einem Ganzen verbürgt nicht die Widerspruchsfreiheit zu anderen Teilen des Ganzen, etwa den unerfüllten Erfüllungsmöglichkeiten, die eine Wahrheitsfunktion mit mehrzelligem Spielraum charakterisieren. Will man diese Problemlage klären, sind alle Komponenten einer Wahrheitsfunktion zu erörtern. Ein solches Unternehmen läßt sich in dem Maße erleichtern, wie man möglichst verwandte Funktionen findet, für die die Problemlage nicht besteht, so daß nur noch die differierten Komponenten zu beachten sind.

3. Zweierlei Zweierwertigkeit: Wahrheitsfunktion und Schaltfunktion

Nun werden Wahrheitsfunktionen auch als Modell der Theorie Boolescher Funktionen behandelt. Ein anderes Modell bieten Schaltfunktionen digitaler Schaltungen. In die Variablen von Schaltfunktionen, etwa einer ODER-Schaltung, kann man jeweilige Werte einsetzen, ohne daß man hier zu ähnlichen Problemangewandtheit würde, wie sie oben Tarski für das Alltagsverständnis beschrieb. Mir Schaltfunktionen hätte man demnach eine Sorte der gesuchten Funktionen. Der Unterschied zwischen Wahrheits- und Schaltfunktion liegt allein in den Werten. Einmal sind es Wahrheitswerte und das andere Mal technische Werte. Somit läßt sich die Frage präzisieren: Darf man mit Wahrheitswerten mathematisch ebenso verfahren wie mit technischen Werten? Diese Frage erfordert die Klärung des Unterschieds zwischen Wahrheitswerten und technischen Werten.

Für die Werte von Wahrheitsfunktionen und die von Schaltfunktionen wird Zweierwertigkeit postuliert: Jeder Aussage und jedem Schalter ist immer nur ein Wert zurechenbar, niemals beide zugleich (*Exklusivität der Werte*). Doch diese Formulierung reicht nicht hin, um die Wahrheitswerte der klassischen Aussagenlogik zu charakterisieren.

Jeder Aussage kommt ausnahmslos ein und allein nur ein Wahrheitswert zu. Wahrheitswerte können einander nicht ablösen (*absolutive Exklusivität*). Damit hängt zusammen, daß für wahre und falsche Aussagen nicht nur Zeitlosigkeit angenommen wird, sondern daß sie auch dann einen Wahrheitswert haben sollen, wenn man ihn nicht kennt (vgl. statt anderer Menne 1985, 25). Hierin unterscheiden sich Wahrheitswerte radikal von technischen Werten. Jedem Schalter einer Schaltung ist zwar nur ein Wert zuzurechnen, aber die Werte können einander ablösen (*relative Exklusivität*).

Liegt zum Beispiel eine ODER-Schaltung mit bestimmten Zuständen der Schalter vor, so müssen andere Zustände möglich sein. Wenn z. B. es dagegen falsch ist, daß $2 + 2 = 5$, und es wahr ist, daß New York eine große Stadt ist, und man diese Aussagen mit einer Disjunktion der Aussagenlogik verknüpft („ $2 + 2 = 5 \vee$ New York ist eine große Stadt“),

tion) negiert, dann wären ohne Gründe verschiedene zuzuordnende Spielräume denkbar, von der Tautologie bis zu Konjunktion. Doch in der klassischen Aussagenlogik ist die Rejektion zuzunorden.

Derartige Zuordnungen verdanken sich dem Versuch, Aussagen mit ihren Wahrheitswerten als Modell der Theorie Boolescher Verbände behandeln zu können, denn jedem Element aus dem Verband ist ein komplementäres zuzuordnen: Die Einführung der aussagenlogischen Negation hat den Sinn, „das logische System zu einer Gesamtheit von einfacher Struktur abzurufen“, wie Paul Bernays (1976, 11) formulierte. Der besonderen Problemlage, die Verhältnisse zwischen Möglichkeiten und bestehenden Werten zu bestimmen, wird hier also eine unangemessene Struktur aufgeführt.

6. Erwägungsorientierung

Die klassische Aussagenlogik ist ungeeignet, Grundlage für ein Wissenschaftsverständnis zu sein, das bessere von schlechteren Lösungsmöglichkeiten unterscheiden möchte, weil der Umgang mit Alternativen in dieser Logik entgegen ihrem Anspruch zu unakzeptablen Widersprüchen führt. Sollte die Argumentation über Verbesserungen hinweg der Kritik standhalten, dann sind u. a. folgende Konsequenzen zu ziehen:

Da die klassische Aussagenlogik Grundlage des Logizismus und des Hilbertprogramms ist, wäre der logisch-mathematische Grundlagenstreit erneut zu beleben. Würde man zunächst einmal Alternativen systematisch zusammenstellen, wären auch solche Positionen zu berücksichtigen, die man für bewegig erachtet. Es ginge nicht mehr um Kampf im Grundlagenstreit, denn auf der Erwägungsebene sind Alternativen in einem Erwägungsforschungsstand zu integrieren. Das Toleranzprinzip Rudolf Carnaps (1968, 44 f.) wäre aufhebbar, welches vom Ausschluss jener Alternativen lebt, die nicht der Kalkulatorientierung folgen. Hierfür wäre reflexiv zu erwägen, was jeweils als Erwägungsalternative taugt.

Zitierte Arbeiten

- Bernays, P. (1976), *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Carnap, R. (1968), *Logische Syntax der Sprache*. Wien: Springer.
- Hilbert, D. und Ackermann, W. (1972), *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer.
- Hilbert, D. und Bernays, P. (1968), *Grundlagen der Mathematik I*. Berlin: Springer.
- Husserl, E. (1966), *Analysen zur passiven Synthesis*. Den Haag: Nijhoff.
- Külpe, O. (1923), *Vorlesungen über Logik*. Leipzig: Hirzel.

Loh, W. (1994), „Widerlegung der klassischen Aussagenlogik als Förderung einer Logik des Erwägens“, in: F. Benschler, B. Blanck, R. Greshoff und W. Loh, *Alternativer Umgang mit Alternativen*. Opladen: Westdeutscher Verlag, 241-259.

Loh, W. (1996), *Widersprüchlichkeit der klassischen Aussagenlogik und ihr Erlösungsparadox*. Arbeitspapier der Forschungsgruppe Erwägungskultur. Paderborn: Universität-GH Paderborn, FB 1, Warburger Str. 100, D-33098 Paderborn.

Menne, A. (1985), *Einführung in die formale Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Schmidt, H. A. (1960), *Vorlesungen über Aussagenlogik*. Berlin: Springer.

Scholz, G. und Hasenjaeger, G. (1961), *Grundzüge der mathematischen Logik*. Berlin: Springer.

Tarski, A. (1972), „Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik“, in J. Smireich (Hg.): *Zur Philosophie der idealen Sprache*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 53-100.

Tarski, A. (1977), *Einführung in die mathematische Logik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Wittgenstein, L. (1964), *Tractatus logico-philosophicus*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Nachtrag

Die abgedruckte Arbeit war Grundlage meines frei gehaltenen Vortrages, den ich auf Einladung hin auf dem 20. Internationalen Wittgenstein Symposium 1997 in Kirchberg im Wechsel gehalten habe. Zahlreiche Diskussionen in Kirchberg machten mir deutlich, daß eine Klärung der Frage, ob die klassische Aussagenlogik widersprüchlich sei, zwei verbreitete Gewohnheiten überwinden muß: 1. Die klassische Aussagenlogik wird oft in einer reduzierten Form vergegenwärtigt. Typisch für diese Reduktion ist die Verwendung einer Variablenart, die sowohl Aussagen als auch Wahrheitswerte betrifft: „Unter einer Interpretation des Buchstabens $\rightarrow p <$ (oder $\rightarrow q <$ usw.) kann die Angabe eines wirklichen Satzes verstanden werden, der an Stelle des Buchstabens zu denken ist. Eine Interpretation von $\rightarrow p <$ kann aber auch einfach die Angabe eines Wahrheitswertes für $\rightarrow p <$ sein. Es macht praktisch keinen Unterschied“ (Willard V. O. Quine: Grundzüge der Logik. Frankfurt am Main 1978). Dieser Reduktion kommt der durch die Informatik zusätzlich unterstützten 2. Gewohnheit entgegen, die ebenfalls reduziert, nicht Wahrheitswerte, sondern irgendwelche zwei Werte für Boolesche Funktionen zu berücksichtigen. Beide Gewohnheiten lassen vergessen, daß die klassische Aussagenlogik von absolut exklusiven Wahrheitswerten und von Wahrheitsträgern handelt, die nicht wechseln, wenn bei einer Wahrheitfunktion alternative Argumentwerte dem Funktionswert für „wahr“ zugeordnet sind. Die klassische Aussagenlogik ist in diesem Sinne trägerhomogen. Denn für die klassische Aussagenlogik gilt nach ihrem Selbstverständnis der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der Variante, daß ein Wahrheitsträger entweder wahr oder falsch ist, wobei die Aussageform dieses Satzes durch eine Disjunktion ausgedrückt wird. Ohne diese Trägerhomogenität wären keine trägerbezogenen logischen Gesetze als Tautologien konzipierbar. Denn nur dadurch,

daß nicht ungleichen Wahrheitsträgern die alternativen symbolisierten Wahrheitswerte zugeordnet werden, kann man annehmen, wie immer der empirische Fall sein mag, daß der Wahrheitsträger zutrifft. Die Frage, ob die klassische Aussagenlogik widersprüchlich sei, läßt sich dann klären, wenn man berücksichtigt, daß sie trägerhomogen verstanden worden ist und von absolut exklusiven Werten handelt.

Zusammenfassung:

Eine Disjunktion ist für eine Urteilslogik das Bedenken von Möglichkeiten. Unter den Möglichkeiten ist auszuwählen, wenn es zu einer Lösung kommt. Das Bedenken der Möglichkeiten wird durch die Lösung ersetzt. Es wäre ein Widerspruch, würde man sagen, sie bestünden zusammen. In der klassischen Aussagenlogik [propositional logic] entspricht dem Bedenken von Möglichkeiten in der Urteilslogik die Möglichkeit der Erfüllung. Die jeweiligen Möglichkeiten der Erfüllung charakterisieren Wahrheitfunktionen. Die Möglichkeiten der Erfüllung und die Erfüllung bestehen in einer Wahrheitfunktion, wie die Disjunktion, zusammen. Bedeutet dies einen Widerspruch? Eine Wahrheitwert ist absolut exklusiv seinem Wahrheitsträger zugeordnet (Proposition, Aussage usw.). Der Wahrheitsträger kann seinen Wahrheitwert nicht wechseln. Ein Schalter kann dagegen offen und geschlossen sein. Daher sind die jeweiligen Werte in beiden Gebieten sehr unterschiedlich und es ist zu fragen, ob beide Themen für die Boolesche Algebra sein können. Wegen der absoluten Exklusivität ist es ein Widerspruch, multiple Erfüllung sein können. Wegen der absoluten Exklusivität, wie z.B. Disjunktionen oder Tautologien, zusammenbringen (Erfüllbarkeitswiderspruch). Es gibt keine Erfüllungsmöglichkeiten, die Disjunktionen oder Tautologien charakterisieren, wenn man beachtet, daß Wahrheitsträger absolut exklusive Wahrheitwerte besitzen.