Erwägen Wissen Ethik

Deliberation Knowledge Ethics

vormals / previously
Ethik und Sozialwissenschaften (EuS) – Streitforum für Erwägungskultur

EWE 17 (2006) Heft 3 / Issue 3

INHALT / CONTENT

FÜNFTE DISKUSSIONSEINHEIT / FOURTH DISCUSSION UNIT

Bedenken zu Erwägungsniveaus am Beispiel der Mengenlehre und der Klassischen Aussagenlogik

Werner Loh

((1)) Meiner Einschätzung nach prägen den Hauptartikel ›Naturalismus und logisch-mathematische Grundlagenprobleme‹ von Bernulf Kanitscheider zwei Orientierungen: Einmal bezieht er sich besonders auf *Ergebnisse* von Biologie, Mathematik und Physik. Zum anderen wird die Bereitschaft ausgedrückt, sich für begriffliche Revolutionen in der Physik offen zu halten ((15)); auch soll die Abstammungslehre bis auf Widerruf gelten ((19)). Demnach ist die invariantere Orientierung Offenheit für Wandel durch *Kritik*, während Ergebnisse nur Stadien sind. Obgleich Kritik die grundlegendere Orientierung ist, wird sie vergleichsweise wenig, mehr in Abgrenzungen ((16ff) und nicht hinreichend charakterisiert, wenn man bedenkt, dass der Artikel sich mit logisch-mathematischen Problemlagen beschäftigt, die "heftig umstritten" ((23)) seien. Wie aber sollen nachvollziehbare Klärungsprozesse möglich sein, wenn kein Kritikkonzept dargelegt wird, das auch noch "grundsätzlich die Selbstanwendung des kritischen Verfahrens" mit der Bereitschaft zu "Alternativen" ((21)) ermöglichen müsste. Wäre dafür kein deduktives, sondern ein *Alternativen* nutzendes Verständnis für Logisch-Mathematisches erforderlich, das eine selbstreferentielle Verortung in kulturellen Evolutionen nicht verhindern, sondern ermöglichen würde? Müsste dann unsere Wissenskultur, die "wissenschaftlich" genannt wird, anders organisiert sein, damit Alternativen adäquat aufbereitet, nachvollziehbar und zugänglich erwogen werden können?

((2)) Kanitscheider sieht den "Kern aller vergeblichen Intentionen, die neuen Zahlen, die transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen, zu desavouieren" ((25)) in folgender, von ihm zitierten Äußerung Cantors ausgedrückt, nämlich dass "die unendlichen Zahlen [...] durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren", es also "fehlerhaft" sei, "von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zu[zu]muten" ((25)). Wie ist diese Behauptung zu überprüfen? Kanitscheider lässt sich auf eine solche Frage nicht ein, sondern geht zu einem postularischen Verständnis von »Axiomatik« über ((26)). Die These Cantors ist in der Literatur wiederholt zu finden, etwa wenn z.B. Hahn (1988: 130) das neue Zahlengeschlecht mit einer neu entdeckten "Tierart" analogisierte. Cantor (1966) wandte sich gegen die Verhaftetheit im Endlichen: "Mir erscheint diese Argumentation ähnlich, wie wenn man daraus, daß es unzählig viele Intensitäten des Grünen gibt, schließen wollte, daß es kein Rotes geben könne" (S. 206). Cantors Analogie erfordert demnach eine *Klassifikation*: 1. Es wäre ein allgemeiner Mengenbegriff als Oberbegriff zu bestimmen. 2. Der abstrakte Oberbegriff zu "Menge" wäre alternativ in Hinblick auf »endliche Mengen« sowie auf »transfinite Mengen« hin zu konkretisieren. Cantor charakterisierte die *Alternativen* wie folgt: "C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, daß sie mit keiner von ihren Teilmengen äquivalent ist*." Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber: D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, daß sie Teilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind*"" (Cantor 1966: 295). So plausibel diese Gegenüberstellung zunächst sein mag, sie ist dennoch zu überprüfen, wenn man nicht unkritisch vorherrschenden Vorgehensweisen folgen will: *Einmal* ist solche Klassifikation und zum *anderen* ist (mindestens) eine *Alternative* zu ihr zu erwägen und zu bewerten, indem man jene Angabe über Mengen, die ihren Teilmengen äquivalent sein und diese echt enthalten sollen, von endlichen Mengen her verständlich macht. Es ist bisher nicht gelungen, einen brauchbaren abstrakt-invarianten Mengen-*Begriff* zu finden bzw. zu bilden, was Unklarheiten für die Relatoren "$\in$" und "$\subset$" zur Folge hat. Ich werde den zweiten Weg versuchen und für den ersten hier allein auf zwei Auffassungen anderer hinweisen: Pollard (1990: 12) schrieb, dass "no one reading this book will already be in a position to say what mathematical sets are", und Hallet (1996: 303) meinte, die Axiomatisierungstendenz im 20. Jh. "went hand in hand with the divorce from any attempt to understand what sets are or what conceptual role they play". Kanitschneider müsste angesichts solcher Äußerungen verdeutlichen, welchen Sinn er mit der Einschätzung "Cantors tiefe Einsicht in die Natur des Unendlichen" verbindet ((26)). Gelänge der zweite Weg, würde zumindest ahnbar, warum der erste erfolglos blieb.

((3)) Der *zweite Weg* ist um so überprüfbarer, je einfacher, grundlegender, enger am Endlichen gebundener und beispielsorientierter der Mengenbegriff ist, den man für die Argumentation verwendet. Das häufig angeführte einfache Beispiel, das auch Cantor (1966: 119f) für die Mengen, die echte Teilmengen enthalten sollen und diesen äquivalent seien, nutzte, ist die der Äquivalenz hier zugrundeliegende eineindeutige Zuordnung natürlicher Zahlen zu positiv-geraden Zahlen, wobei die Menge der positiv-geraden Zahlen in der Menge der natürlichen enthalten sei. Der *Klassifikationsansatz* führt hier zur Frage, wie man zu einer Mengen-Alternative zum Endlichen kommen kann, wenn man bei *demselben* Bereich (natürliche und positiv-ganze Zahlen) bleibt. Farben und Tiere wären hier – analogisch bedacht – den Mengen zuzuordnen und nicht den natürlichen Zahlen. Was würde bei der Analogie den natürlichen Zahlen entsprechen? Liegt der Analogie eine Ebenenkonfusion zugrunde, der sich die Anfangsplausibilität verdankt, die einem circulus vitiosus Vorschub leistet, indem die Alternative dadurch bestimmt wird, dass man sie schon voraussetzt? Nun findet man Hinweise, von denen aus man vielleicht Alternativen bestimmen könnte. Hahn gab z.B. in der Tradition Cantors (1966: 178f) an: "Jede Anzahl muß entweder gerade oder ungerade sein. Cantors transfinite Kardinalzahlen aber sind weder gerade noch ungerade; oder: Jede Anzahl muß durch Addition der Zahl 1 vergrößert werden, für Cantors transfinite Kardinalzahlen aber trifft dies nicht zu" (1988: 130). Derartige Unterschiede treffen nicht bloß auf Klassifikationsalternativen zu. Auch bei Verhältnissen zwischen Teilen eines Ganzen zum Ganzen oder zu anderen Teilen des Ganzen lassen sich analoge Unterschiede ausmachen: Eine Katze läuft auf ihren Pfoten, aber die roten Blutkörperchen laufen nicht auf Pfoten durch ihre Adern. Es sind *mereologische* von *klassifikatorischen Alternativen* zu unterscheiden. Ist eine mereologische Alternative hinsichtlich einer endlichen Mengen-Ganzheit zu erwägen, die Entsprechungen zu echten Teilmengen und eineindeutigen Zuordnungen angeben lässt? Es ist erstaunlich, dass hinsichtlich der Alternativenbehauptung Cantors und anderer m.W. dieser Weg in der Literatur nicht diskutiert worden ist. Welche Erwägungsniveaus wären für diese Problemlage zu unterscheiden?

((4)) Für den Begriff 'Menge als Ganzheit' nutze ich als Anregung Cantors (1966) Bestimmung, in der von einer "Zusammenfassung [...] von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten [...] zu einem Ganzen" (S. 284) die Sprache ist, und verknüpfe sie mit der Angabe, wo die Objekte "derselben Begriffssphäre" (S. 150) angehören sollen (vgl. auch den Gesetzesbezug, S. 204). Diese Anregung soll nun dahingehend gedacht werden, dass ein *Begriff* (– etwa 'natürliche Zahl kleiner 5 und größer 0' –) mit *Objekten* (– hier nun: 1, 2, 3, 4 –) *verbunden* ist. Die Verbindungen verschaffen eine Zusammenfassung zu einem Ganzen. Es sind also *drei Arten von Komponenten* hervorzuheben: *Begriff* (Prädikat), *Verbindung*, *Objekt* (Element). Der Terminus "*Menge*" käme der Verbindung zu. Eine solche Menge soll "*Collectionsmenge*" heißen (z.B.: ${}_{c}N = \{1, 2, 3, 4\}$). Dieses Mengenkonzept ist so ausbaubar, dass Objekte auch Mengen und Begriffe sein mögen. Selbst idealisierend ist eine Collectionsmenge beliebigen Umfangs wegen der Verbindungen zwischen Begriff und Objekten als vollendete Ganzheit endlich; zu jeder Collectionsmenge natürlicher Zahlen sind natürliche Zahlen angebbar, die einer solchen Menge nicht zugehören. Es gibt also keine Collectionsmenge aller natürlicher Zahlen. Dies wäre widersprüchlich. Mit Collectionsmengen lässt sich keine Unendlichkeit erschließen.

((5)) Wie ist eine mereologische Alternative konstruierbar? In der Literatur gibt es Anregungen, die aber m.W. nicht Eingang in eine klärungsförderliche Tradition der Erörterungen über Mengenlehre und Quantoren gefunden haben. (Wäre das auch Material für eine Konzeption der Erwägungsniveaus, indem man die Abhängigkeit von Entwicklungspfaden, ein-schließlich der Sackgassen, danach bemessen würde, in welchem Ausmaß problemadäquate Alternativen erwogen worden sind? Bei welchen Verzweigungen lässt man welche Alternativen zu, wo vermeidet und wo fördert man sie als in Erwägungen zu integrierende Alternativen oder nur als Lösungsalternativen mit einhergehender Konkurrenz, – was logisch in Disjunktionen zu fassen wäre?) Brentano (1959) meinte 1917: "Etwas anderes ist, wenn man sagt, j e d e s von unendlich vielen Dingen, und wenn man sagt, a l l e z u s a m m e n seien widerspruchslos. Das erstere ist richtig, das letztere falsch" (S. 254; das zitierte auch Kaufmann in seiner Auseinandersetzung mit der Mengenlehre und Dingler erwähnte die Differenz zwischen "Alles" und "Jedes", s. Thiel 1982: 254 Anm. u. 220). Die Anregung lässt sich aufnehmen, wenn man sie mit dem Gebrauch von Variablen zusammenbringt und nicht bloß stufentheoretisch auslegt. (Leider ist die Erörterung, was Variablen ausmacht, meiner Kenntnis nach wenig entwickelt.) Nimmt man z.B. statt der aufzählenden Angabe – wie "{1, 2, 3, 4}" – eine Variable wie in dem Ausdruck "{n | 0 < n < 5}", dann stellt jede Substitution im Rahmen des hier gebildeten Mengenkonzeptes eine Verbindung vom Begriff '0 < n < 5' zu einem Objekt, etwa der 3, her bzw. gibt sie an. Die Substitution *fokussiert* auf die Subsumtion *eines* Objektes unter den mit ihm verbundenen Begriff. Derartige Verbindungen sollen "*Subsumtionsmengen*" genannt werden. Weiterhin besteht durch die Variable eine *Offenheit* für andere Substitutionen. (Können Variablen in einem »platonischen Reich«, das Kanitscheider ja *nicht* annimmt ((42ff)), unabhängig von Menschen und Evolution vorkommen?) Der Ausdruck "{n | 0 < n < 5}" ist wegen des Variablengebrauchs nur einem *Teil* der Ganzheit zum Ausdruck "{1, 2, 3, 4}" zurechenbar. Subsumtionsmengen sind als Fragmente zu Collectionsmengen auffassbar. Bezieht man sich auf Objekte zu einem Begriff für Subsumtionsmengen, seien diese selbst Mengen oder nicht, und will sie *ausnahmslos* meinen, dann soll der Ausdruck "*jedes*" verwendet werden. Meint man dagegen *ausnahmslos* Objekte einer Collectionsmenge, seien diese selbst Mengen oder nicht, so soll der Ausdruck "*alle*" gebraucht werden. Wegen der Offenheit führt der Ausdruck "jede natürliche Zahl" zu keinem Widerspruch, wohl aber der Ausdruck "alle natürlichen Zahlen". Eine Unendlichkeitsangabe lässt sich somit formulieren: *Jede* positiv-gerade Zahl ist als Objekt wegen der Substitution sowohl mit dem Begriff 'positiv-gerade Zahl' als auch mit dem Begriff 'natürliche Zahl' als verbunden erfasst, aber *nicht jede* natürliche Zahl. Jede Subsumtionsmenge positiv-gerader Zahlen ist *enthalten* in jeder Subsumtionsmenge der natürlichen Zahlen und nicht umgekehrt. Schließlich ist *jede* natürliche Zahl hinsichtlich der Substitutionen eineindeutig positiv-geraden Zahlen zuordenbar. Hierdurch wird keine transfinite Menge bestimmt, sondern die Variablen lassen nur potenziell Unendliches zu. Subsumtionsmengen sind nicht vermehrbar und es hat keinen Sinn, ihnen schon Zahleneigenschaften beizulegen. Für Collectionsmengen ist das nicht zutreffend. (Da eine Differenz zwischen »Alles« und »Jedes« in der Tradition Cantors und der Quantorenlogik nicht geklärt ist, bleibt das Problem, dass bei einer hinreichenden Klärung Annahmen über »alle natürliche Zahlen als Ganzheit« widersprüchlich sein können, wodurch das Diagonalverfahren, die Kontinuumshypothese und die gesamte Aleph-Konzeption hinfällig wären.)

((6)) Meine Überlegung zur Mengenlehre sollte gleichsam als Spielmaterial verdeutlichen – auch dann, wenn sie sich als falsch erweist –, dass für eine kritische Einstellung das Erwägen von problemadäquaten Alternativen erforderlich ist, um kritisierbare *Geltungsbedingungen* für eingeschlagene Pfade zu haben. An Reflexionen darüber, wie *adäquat Alternativen bei welchen Problemen zu erwägen* sind, mangelt es nicht nur im Text von Kanitscheider, nicht nur in Auseinandersetzungen um die Mengenlehre, sondern überhaupt bisher in den »Wissenschaften«. Ich möchte diese Problemlage an einem anderen Spielmaterial, dem der Klassischen Aussagenlogik, die auch Kanitscheider verwendet, verschärfen. Es geht mir darum zu verdeutlichen, dass weder "hohe Konvergenz der Resultate" ((38)) oder "transkulturelle[n] Invarianz" (Anm. 70) für kritische Orientierung überzeugend wirken dürften, auch nicht, dass allein bloß nur noch eine "Minorität" (Anm. 63) gegenteilige Auffassungen vertrete.

((7)) Die Klassische Aussagenlogik ist weltweit verbreitet, Basis für formalisierte Mengenlehren und hat Eingang in die Informatik gefunden. Ihre Widerspruchsfreiheit gilt als bewiesen; es gibt m.W. nicht einmal eine Minderheit, die das in Frage stellt. Untersucht man solche Beweise, dann sind diese überzeugend, wenn man nicht problemadäquat erwägt. Die Klassische Aussagenlogik in der Tradition von Whitehead/Russell, Hilbert/Ackermann, Carnap, Tarski oder Quine ist keine bloße Kalkülspielerei, sondern es geht je nach philosophischem Hintergrund um Aussagen, Propositionen, Sätze usw., welche definitiv einen von zwei Werten haben, etwa »wahr« und »falsch«, auch "Wahrheitswerte" genannt, und die nicht bekannt sein müssen. Will man einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit führen, dann ist erwägungsorientiert zu fragen, welche der beiden Entitätssorten – »Aussagen« und »Wahrheitswerte« – man dafür braucht. Es sind zunächst vier Möglichkeiten zu erwägen: beide Sorten sind erforderlich, nur eine oder keine Sorte. Reflexiv ist zu erwägen, ob eine solche Erwägung ausreicht. Sind zum Beispiel beide Sorten um weitere zu ergänzen? In der Klassischen Aussagenlogik begnügt man sich mit einer Sorte von Variablen, um »logische Gesetze« formulieren zu können. In der wahrheitsfunktionalen Fassung verwendet man Variablen allein für Wahrheitswerte, um die Funktoren (Junktoren) und logischen Gesetze (bzw. »Tautologien« oder »Allgemeingültigkeiten«) zu bestimmen. Eine *Adjunktion* liegt vor, wenn der Funktionswert nur dann das Falsche (f) ist, wenn für beide Argumentwerte ebenfalls das Falsche und nicht das Wahre (w) besteht ($w \vee w = w$, $w \vee f = w$, $f \vee w = w$ und $f \vee f = f$). Die *Negation* einer Aussage soll den Funktionswert des Wahren haben, wenn der Argumentwert das Falsche ist und umgekehrt ($\neg (f) = w$ und $\neg (w) = f$). Tautologien bestehen wahrheitsfunktional dann, wenn bei jeder Substitution der Argumentwerte der Funktionswert des Wahren vorliegt. Ein solches Gesetz drückt folgende Aussagenform aus: $p \vee \neg p$. Denn ordnet man "p" "w" zu, dann ist für die Negation "$\neg p$" "f" gegeben, was adjunktiv zum Funktionswert des Wahren führt. Den gleichen Funktionswert erhält man, wenn man "p" das Falsche zurechnet. Die Aussageform "$p \vee \neg p$" ist also bei jeder Substitution wahr und damit aussagenlogisches Gesetz. Aussagenlogische Axiomensysteme kann man auf gleiche Weise behandeln und ausrechnen, dass jedes Axiom eine Tautologie ist sowie dass aus Abtrennungs- und Einsetzungsregel ebenfalls allein Tautologien hervorgehen. Hiermit gilt dann das Axiomensystem als widerspruchsfrei. Man mag bei rein formalistischer (kalkülistischer) Vorgehensweise noch von Deutungen der zwei Werte als Wahrheitswerte absehen und sie allein als ungleiche Kalkülfiguren betrachten und damit wegen der Deutungsfreiheit meinen, einen »absoluten« Beweis geführt zu haben (Nagel / Newman 1971: 109ff). Ordnet man solche Beweisführungen den oben erwogenen Alternativen zu, dann ist diejenige Möglichkeit verfolgt worden, die *eine* Entitätssorte berücksichtigt, und zwar die Wahrheitswerte oder nur entsprechende Kalkülfiguren. Diese Vorgehensweise ist beliebig reproduzierbar und führt auf diesem erwägungsfreien Pfad nicht zu Meinungsdifferenzen. Lässt man sich aber auf Erwägen ein, dann ist zu fragen, *ob Widerspruch und Widerspruchsfreiheit ohne »Aussagen« möglich sind*. Diese Frage lässt sich, wenn man aussagenlogische Konjunktion und Adjunktion vergleicht, beantworten. Eine aussagenlogische *Konjunktion* hat nur dann den Funktionswert des Wahren, wenn beide Argumentwerte wahr sind ($w \wedge w = w$, $w \wedge f = f$, $f \wedge w = f$ und $f \wedge f = f$). Negiert man wie in dem Ausdruck “$p \wedge \neg p$”, dann erhält man bei jeder Zuordnung von Wahrheitswerten den Funktionswert des Falschen. Der Ausdruck “$p \wedge \neg p$” gilt als Aussageform des Widerspruchs. Setzt man statt “p” z.B. die Aussage “Es ist wahr, dass es in NN um 1^{00} regnet” (“R”), steht für “$\neg p$” “Es ist nicht wahr, also falsch, dass es in NN um 1^{00} regnet”. *Beachtet man nur die Wahrheitsfunktion* “$w \wedge \neg (w) = f$”, *dann ist dem Ausdruck nicht abzusehen*, *ob ein Widerspruch vorliegt* (Gleiches gilt für den anderen Argumentwert): Es könnte dem ersten Glied eine völlig andere Aussage zugehören als dem zweiten. Fügt man Aussagen hinzu, wird ein Widerspruch bemerkbar: ${}_R w \wedge \neg ({}_R w) = f$ (bzw.: ${}_R f \wedge \neg ({}_R f) = f$). Die Glieder “${}_R w$” und “$\neg ({}_R w)$” (bzw. “${}_R f$” und “$\neg ({}_R f)$”) stehen unabhängig davon, welche Wahrheitsfunktion sie verknüpft, zueinander im Widerspruch, also auch bei adjunktiver Verknüpfung, welche allerdings den Funktionswert des Wahren hat: ${}_R w \vee \neg ({}_R w) = w$ (bzw.: ${}_R f \vee \neg ({}_R f) = w$). Man erhält das *absurde Ergebnis, dass etwas insgesamt wahr sein soll, was widersprüchlich ist*. Die Klassische Aussagenlogik ist demnach hinfällig, wovon auch die formalisierten Mengenlehren berührt sind, auf die Kanitscheider sich stützt.

((8)) Die Klassische Aussagenlogik gilt als isomorph zur Schaltalgebra, die widerspruchsfrei Realisationen in Schaltkreisen ermöglicht. Doch die Isomorphiebehauptung fokussiert auf Wahrheitsfunktionen. Eine *aussagen*-logische »Aussage« *referiert* im Unterschied zu ihrem Analogon, etwa einem Schalter, auf Anderes (im Beispiel: das Wetter). Schalter sind hier nicht widerspruchsfähig, weswegen die Isomorphiebehauptung unzutreffend ist. Wenn man nun wie Stegmüller (1983) meinte, die “logischen Denkprozesse” seien mit der Klassischen Aussagenlogik formalisiert worden, wodurch sich die Möglichkeit ergeben habe, “sie durch geeignete Automaten nachzuvollziehen” (S. 729), dann kommt man zu einem Kernproblem eines jeden Naturalismusprogrammes: Woher nimmt man den Maßstab für die Behauptung, in technischen Systemen würden Denkprozesse nachvollzogen? Müsste er im je eigenen, zu Disjunktionen und natürlichen Zahlen fähigem Denken liegen? Der »echte Platonismus« betrifft schon so »Einfaches« wie die Eins, sofern man mit Frege (1961) annimmt: “Es giebt nicht verschiedene Zahlen Eins, sondern nur eine” (S. 49). Wenn es nur *eine* Eins gibt, dann kann die Eins keine Grundlage z.B. in Mensch*en* haben, auch nicht in Tieren, eine Problemlage, die vor aller elaborierten Mathematik und Logik Grundproblem für ein Naturalismusprogramm sein müsste.

Literatur

Brentano, Franz: Psychologie vom empirischen Standpunkt, Band 2. Hamburg 1959

Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hildesheim 1966

Frege, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetik. Darmstadt 1961

Hahn, Hans: Empirismus, Logik, Mathematik. Frankfurt am Main 1988

Hallet, Michael: Cantorian Set Theory and Limitation of Size. Oxford 1996

Nagel, Ernest / Newman, James R.: Gödel’s Proof. London 1971

Pollard, Stephen: Philosophical Introduction to Set Theory. Notre Dame, London 1990

Stegmüller, Wolfgang: Erklärung Begründung Kausalität. Berlin, Heidelberg, New York 1983

Thiel, Christian (Hg.): Erkenntnistheoretische Grundlagen der Mathematik. Hildesheim 1982

Adresse

Dr. Werner Loh, Universität Paderborn, Fakultät I, EWE, Warburger Str. 100, D-33098 Paderborn